

# 一种非条件稳定的隐式时域有限差分法

高文军, 吕善伟

(北京航空航天大学电子工程系, 北京 100083)

**摘要:** 介绍一种基于交替方向隐式(ADI)技术的时域有限差分法(FDTD). 该方法是非条件稳定的, 时间步长不再受到 Courant 稳定条件的限制, 而是由数值色散误差来确定. 与传统的 FDTD 相比, AD-FDTD 增大了时间步长, 从而缩短了总的计算时间, 特别是当空间网格远小于波长时, 优点更加突出. 首次把完全匹配层(PML)边界条件应用到 AD-FDTD 计算中, 采用幂指数形式的时间步进算法, 推导了相应的迭代公式. 进行了实例计算, 并与传统 FDTD 的结果对比, 验证了 AD-FDTD 的有效性与优越性.

**关键词:** 时域有限差分法 (FDTD); 交替方向隐式技术 (ADI); 完全匹配层 (PML)

**中图分类号:** TM 15      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2002) 06 0900-03

## An Unconditionally Stable Implicit Finite-Difference Time-Domain Method

GAO Wenjun, LÜ Shanwei

(Dept. of Electronic Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100083, China)

**Abstract:** An implicit finite difference time domain method (FDTD) using the principle of the alternating direction implicit (ADI) technique is introduced. The method is unconditionally stable, and the maximum time step size is not limited by the Courant-Friedrich-Levy (CFL) condition, but rather by numerical errors. Compared with the conventional FDTD method, the time step size of AD-FDTD can be much larger, so the simulation time is shortened, especially when the grid size is much smaller than wavelength. The perfect matched layer (PML) technique is used in AD-FDTD calculation for the first time. The expressions for the exponential time stepping algorithm in PML are derived. The AD-FDTD method is validated by an example.

**Key words:** FDTD; alternating direction implicit technique (ADI); perfect matched layer (PML)

### 1 引言

时域有限差分法(FDTD)是一种简单有效的时域方法<sup>[1,2]</sup>, 仅通过一次计算, 就可以得到系统的宽频带信息, 因此已经被广泛地应用于求解电磁场的问题中. 应用 FDTD, 空间网格的选取必须远小于波长, 而时间步长的选取又受到 Courant 稳定条件的限制, 这就需要相当长的仿真计算时间才能得到较精确的结果. 本文介绍最近出现的基于交替方向隐式技术(Alternating direction implicit technique-ADI)的 FDTD 方法<sup>[3,4]</sup>, 把 ADI 技术应用到 FDTD 的迭代公式中, 仍然采用 Yee 氏网格, 形成隐式 FDTD 的表达式. 这种 AD-FDTD 是非条件稳定的, 时间步长可以选择得非常大, 不再受稳定条件的限制, 而是由数值精度来确定. 该方法突出的优点是可以缩短仿真时间, 虽然每个时间步的计算时间会增加, 但由于时间步长的成倍增大, 总的仿真时间仍会减少. 本文将完全匹配层(PML)边界条件应用到 AD-FDTD 计算中, 推导了相应的迭代公式. 在实例中, 用文中介绍的公式进行仿真, 并用传统 FDTD 的仿真结果进行验证, 获得了满意的结果.

### 2 AD-FDTD 的基本公式

把 ADI 技术应用到 FDTD 的迭代公式中, 需要把第  $n$  步到第  $(n+1)$  步的计算分成两次来进行, 具体迭代公式为: 第  $n$  步到第  $(n+1/2)$  步:

$$E_x|_{i+\frac{n+1}{2}, j, k} = E_x|_{i+\frac{n}{2}, j, k} + \frac{\Delta t}{2\epsilon} \cdot [ (H_z|_{i+\frac{n}{2}, j+1/2, k} - H_z|_{i+\frac{n}{2}, j-1/2, k}) / \Delta y (j) - (H_y|_{i+\frac{n+1}{2}, j, k+1/2} - H_y|_{i+\frac{n+1}{2}, j, k-1/2}) / \Delta z (k) ] \quad (1a)$$

$$E_y|_{i, j+\frac{n+1}{2}, k} = E_y|_{i, j+\frac{n}{2}, k} + \frac{\Delta t}{2\epsilon} \cdot [ (H_x|_{i, j+\frac{n}{2}, k+1/2} - H_x|_{i, j+\frac{n}{2}, k-1/2}) / \Delta z (k) - (H_z|_{i+\frac{n+1}{2}, j+1/2, k} - H_z|_{i+\frac{n+1}{2}, j-1/2, k}) / \Delta x (i) ] \quad (1b)$$

$$E_z|_{i, j, k+\frac{n+1}{2}} = E_z|_{i, j, k+\frac{n}{2}} + \frac{\Delta t}{2\epsilon} \cdot [ (H_y|_{i+\frac{n}{2}, j, k+1/2} - H_y|_{i+\frac{n}{2}, j, k-1/2}) / \Delta x (i) - (H_x|_{i, j+\frac{n+1}{2}, k+1/2} - H_x|_{i, j+\frac{n+1}{2}, k-1/2}) / \Delta y (j) ] \quad (1c)$$

$$H_x|_{i,j+1/2,k+1/2} = H_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^n + \frac{\Delta t}{2\mu} \cdot [(E_y|_{i,j+1/2,k+1}^n - E_y|_{i,j+1/2,k}^n)/\Delta z(k) - (E_z|_{i,j+1,k+1/2}^n - E_z|_{i,j,k+1/2}^n)/\Delta y(j)] \quad (1d)$$

$$H_y|_{i+1/2,j,k+1/2} = H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^n + \frac{\Delta t}{2\mu} \cdot [(E_z|_{i+1,j,k+1/2}^n - E_z|_{i,j,k+1/2}^n)/\Delta x(i) - (E_x|_{i+1/2,j,k+1}^n - E_x|_{i+1/2,j,k}^n)/\Delta z(k)] \quad (1e)$$

$$H_z|_{i+1/2,j+1/2,k} = H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^n + \frac{\Delta t}{2\mu} \cdot [(E_x|_{i+1/2,j+1,k}^n - E_x|_{i+1/2,j,k}^n)/\Delta y(j) - (E_y|_{i+1,j+1/2,k}^n - E_y|_{i,j+1/2,k}^n)/\Delta x(i)] \quad (1f)$$

从第  $(n+1/2)$  步到第  $(n+1)$  步:

$$E_x|_{i+1/2,j,k} = E_x|_{i+1/2,j,k}^n + \frac{\Delta t}{2\epsilon} \cdot [(H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1} - H_z|_{i+1/2,j-1/2,k}^{n+1})/\Delta y(j) - (H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} - H_y|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1})/\Delta z(k)] \quad (2a)$$

$$E_y|_{i,j+1/2,k} = E_y|_{i,j+1/2,k}^n + \frac{\Delta t}{2\epsilon} \cdot [(H_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} - H_x|_{i,j+1/2,k-1/2}^{n+1})/\Delta z(k) - (H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1} - H_z|_{i-1/2,j+1/2,k}^{n+1})/\Delta x(i)] \quad (2b)$$

$$E_z|_{i,j,k+1/2} = E_z|_{i,j,k+1/2}^n + \frac{\Delta t}{2\epsilon} \cdot [(H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} - H_y|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1})/\Delta x(i) - (H_x|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} - H_x|_{i-1/2,j,k+1/2}^{n+1})/\Delta y(j)] \quad (2c)$$

$$H_x|_{i,j+1/2,k+1/2} = H_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^n + \frac{\Delta t}{2\mu} \cdot [(E_y|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1} - E_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1})/\Delta z(k) - (E_z|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1} - E_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1})/\Delta y(j)] \quad (2d)$$

$$H_y|_{i+1/2,j,k+1/2} = H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^n + \frac{\Delta t}{2\mu} \cdot [(E_z|_{i+1,j,k+1/2}^{n+1} - E_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1})/\Delta x(i) - (E_x|_{i+1/2,j,k+1}^{n+1} - E_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1})/\Delta z(k)] \quad (2e)$$

$$H_z|_{i+1/2,j+1/2,k} = H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^n + \frac{\Delta t}{2\mu} \cdot [(E_x|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1} - E_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1})/\Delta y(j) - (E_y|_{i+1,j+1/2,k}^{n+1} - E_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1})/\Delta x(i)] \quad (2f)$$

式(1a)~(1f)和式(2a)~(2f)都是隐式,不能直接用来编程计算,需要进一步推导其迭代公式。比如,把式(1a)与式(1e)联立进行化简,可以得到前半个时间步长的电场分量  $E_x$  的求解方程,采用均匀网格划分时,其方程如式(3)。

其余电场分量均满足形如式(3)的方程,在整个计算域中

求解方程组,得到各电场分量值,然后磁场分量由式(1d)~(1f)得到。运用同样的方法可以计算后半半个时间步长的场分量,这样就完成了第  $n$  步到第  $(n+1)$  步的计算。文献[5]中已从理论上证明,这种迭代公式是非条件稳定的。

$$\begin{aligned} & - \frac{\Delta t^2}{4\epsilon\mu\Delta z^2} E_x|_{i+1/2,j,k-1}^n + \left(1 + \frac{\Delta t^2}{2\epsilon\mu\Delta z^2}\right) \cdot E_x|_{i+1/2,j,k}^n \\ & - \frac{\Delta t^2}{4\epsilon\mu\Delta z^2} E_x|_{i+1/2,j,k+1}^n = E_x|_{i+1/2,j,k}^n + \frac{\Delta t}{2\epsilon\Delta y} (H_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^n \\ & - H_z|_{i+1/2,j-1/2,k}^n) - \frac{\Delta t}{2\epsilon\Delta z} (H_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^n - H_y|_{i+1/2,j,k-1/2}^n) \\ & + \frac{\Delta t^2}{4\epsilon\mu\Delta x\Delta z} (E_z|_{i+1,j,k-1/2}^n - E_z|_{i,j,k-1/2}^n - E_z|_{i+1,j,k+1/2}^n \\ & + E_z|_{i,j,k+1/2}^n) \end{aligned} \quad (3)$$

### 3 PML层中的公式

PML层中的迭代公式采用 Berenger 的分离场分量表示方法<sup>[6]</sup>,以  $E_x, H_y$  分量为例,其表达式为

$$\left\{ \epsilon_0 \epsilon_{rx} \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_y \epsilon_x \right\} E_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} (H_{zx} + H_{zy}) \quad (4a)$$

$$\left\{ \epsilon_0 \epsilon_{rx} \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_z \epsilon_{rx} \right\} E_{xz} = - \frac{\partial}{\partial z} (H_{yx} + H_{yz}) \quad (4b)$$

$$\left\{ \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_z^* \right\} H_{yz} = - \frac{\partial}{\partial z} (E_{xy} + E_{xz}) \quad (5a)$$

$$\left\{ \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} + \sigma_x^* \right\} H_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} (E_{zx} + E_{zy}) \quad (5b)$$

应用 ADI 技术,并采用幂指数形式的时间步进算法,经过推导得到的第  $n$  步到第  $(n+1/2)$  步的场分量迭代公式为

$$E_{xy}|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} = e^{-\sigma_y \Delta t/2\epsilon_0} E_{xy}|_{i+1/2,j,k}^n + \frac{1 - e^{-\sigma_y \Delta t/2\epsilon_0}}{\sigma_y \epsilon_x \Delta y} \cdot [H_{zx}|_{i+1/2,j+1/2,k}^n - H_{zx}|_{i+1/2,j-1/2,k}^n + H_{zy}|_{i+1/2,j+1/2,k}^n - H_{zy}|_{i+1/2,j-1/2,k}^n] \quad (6a)$$

$$E_{xz}|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} = e^{-\sigma_z \Delta t/2\epsilon_0} E_{xz}|_{i+1/2,j,k}^n + \frac{1 - e^{-\sigma_z \Delta t/2\epsilon_0}}{\sigma_z \epsilon_{rx} \Delta z} \cdot [H_{yx}|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2} - H_{yx}|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} + H_{yz}|_{i+1/2,j,k-1/2}^{n+1/2} - H_{yz}|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2}] \quad (6b)$$

$$H_{yz}|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} = e^{-\sigma_z^* \Delta t/2\mu_0} H_{yz}|_{i+1/2,j,k+1/2}^n + \frac{1 - e^{-\sigma_z^* \Delta t/2\mu_0}}{\sigma_z^* \Delta z} \cdot [E_{xy}|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - E_{xy}|_{i+1/2,j,k+1}^{n+1/2} + E_{xz}|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - E_{xz}|_{i+1/2,j,k+1}^{n+1/2}] \quad (7a)$$

$$H_{yx}|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} = e^{-\sigma_x^* \Delta t/2\mu_0} H_{yx}|_{i+1/2,j,k+1/2}^n + \frac{1 - e^{-\sigma_x^* \Delta t/2\mu_0}}{\sigma_x^* \Delta x} \cdot [E_{zx}|_{i+1,j,k+1/2}^n - E_{zx}|_{i,j,k+1/2}^n + E_{zy}|_{i+1,j,k+1/2}^n - E_{zy}|_{i,j,k+1/2}^n] \quad (7b)$$

式(6a)和式(7b)直接计算便可得到  $E_{xy}$  和  $H_{yx}$  分量,而式(6b)与(7a)联立可得到求解  $E_{xz}$  分量的方程,如式(8)。

$$\begin{aligned} & - D_{z1}|_{i+1/2,j,k} C_{tz}|_{i+1/2,j,k-1/2} E_{xz}|_{i+1/2,j,k-1}^n \\ & + [1 + D_{z1}|_{i+1/2,j,k} (C_{z1}|_{i+1/2,j,k-1/2} + C_{tz}|_{i+1/2,j,k+1/2})] \\ & \cdot E_{xz}|_{i+1/2,j,k}^n - D_{z1}|_{i+1/2,j,k} C_{tz}|_{i+1/2,j,k+1/2} E_{xz}|_{i+1/2,j,k+1}^n = \\ & e^{-\sigma_z^*(i+1/2,j,k)\Delta t/2\mu_0} E_{xz}|_{i+1/2,j,k}^n + D_{z1}|_{i+1/2,j,k} (H_{yx}|_{i+1/2,j,k-1/2}^n \\ & - H_{yx}|_{i+1/2,j,k+1/2}^n) + e^{-\sigma_x^*(i+1/2,j,k-1/2)\Delta t/2\mu_0} H_{yz}|_{i+1/2,j,k-1/2}^n - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & e^{-\sigma_z^* (i+1/2, j, k+1/2) \Delta t / 2 \mu_0} H_{yz} |_{i+1/2, j, k+1/2+}^n D_E |_{i+1/2, j, k} \\
 & C_E |_{i+1/2, j, k-1/2} E_{xy} |_{i+1/2, j, k-1}^n - D_E |_{i+1/2, j, k} (C_{tz} |_{i+1/2, j, k-1/2} \\
 & + C_E |_{i+1/2, j, k-1/2}) E_{xy} |_{i+1/2, j, k}^n + D_E |_{i+1/2, j, k} C_{tz} |_{i+1/2, j, k+1/2} E_{xy} |_{i+1/2, j, k+1}^n \\
 & \text{其中}
 \end{aligned} \quad (8)$$

$$D_E |_{i+1/2, j, k} = \frac{1 - \exp[-\sigma_z (i + \frac{1}{2}, j, k) \Delta t / 2 \epsilon_0]}{\sigma_z (i + \frac{1}{2}, j, k) \epsilon_0 (i + \frac{1}{2}, j, k) \Delta z}$$

$$C_E |_{i+1/2, j, k+1/2} = \frac{1 - \exp[-\sigma_z^* (i + \frac{1}{2}, j, k + 1/2) \Delta t / 2 \mu_0]}{\sigma_z^* (i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \Delta z}$$

解得后  $E_x$ 、 $E_{xy}$  后,  $H_{yz}$  可用式(7a)计算, 其它分量以及后半时间步长的算法依此类推, 不再详述。

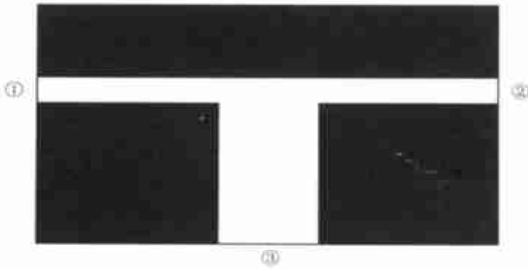


图 1 T形槽线结构示意图

#### 4 实例计算结果

根据以上公式, 编制了实用程序, 并分析计算了T形槽线结构。如图1所示, 槽线敷在厚度为0.635mm的介质板上, 相对介电常数为10.2, 主线宽度为0.08mm, 支线宽度为0.44mm。计算时, 采用非均匀网格划分, 最小网格分别为  $\Delta x = 0.02\text{mm}$ ,  $\Delta y = 0.02\text{mm}$ ,  $\Delta z = 0.079375\text{mm}$ 。PML边界为10层, 理论反射系数取  $10^{-6}$ , 有耗介质电导率和磁阻率的衰减指数取3。激励源采用高斯脉冲, 其中  $T = 14.27\text{ps}$ ,  $t_0 = 3T$ 。采用FDTD计算时, 稳定条件为  $\Delta t \leq 4.644 \times 10^{-14}$ 秒, 取  $\Delta t = 4.6 \times 10^{-14}$ 秒, 共计算13000个时间步长, 在Pentium III 733上计算大约需要290分钟。在ADF-FDTD计算中, 取  $\Delta t = 6.6 \times 10^{-13}$ 秒, 共计算500个时间步长, 计算大约需要42分钟。计算结果如图2所示, 二者结果基本相同, 而ADF-FDTD的计算时间仅为FDTD的14%, 呈现出ADF-FDTD计算效率高的优势。

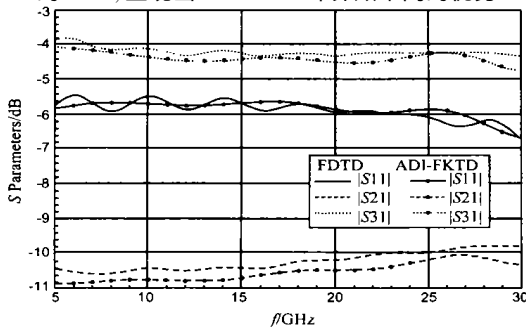


图 2 T形槽线结构的S参数

#### 5 结论

本文介绍的非条件稳定的时域有限差分法, 基于交替方向隐式技术(ADI), 时间步长的选取不再受到稳定条件的限制, 而是由数值色散确定, 缩短了FDTD计算所需机时, 提高了FDTD的计算效率。实例表明, 两种方法计算结果相同时, ADF-FDTD计算所需机时仅为FDTD的14%, 体现出前者的优点。完全匹配层(PML)技术的应用, 有利于ADF-FDTD的发展, 使FDTD的适应空间更为广阔。

#### 参考文献:

- [1] Allen Taflove. Computational Electrodynamics: The Finite Difference Time Domain Method [M]. Dordham, MA: Artech House, 1995.
- [2] 高本庆. 时域有限差分法(FDTD Method) [M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.
- [3] Takefumi Namiki. A new FDTD algorithm based on alternating direction implicit method [J]. IEEE Trans, 1999, MIT-47(10): 2003-2007.
- [4] Takefumi Namiki. 3-D ADF-FDTD method unconditionally stable time domain algorithm for full vector maxwell's equation [J]. IEEE Trans, 2000, MIT-48(10): 1743-1748.
- [5] Fenghua Zheng, Zhizhang Chen, Jiazong Zhang. Toward the development of a three dimensional unconditionally stable finite difference time domain method [J]. IEEE Trans, 2000, MIT-48(9): 1550-1558.
- [6] Jear Pierre Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves [J]. J Comput Phys, 1994, 114: 185-200.

#### 作者简介:



高文军 男, 1973年11月生于内蒙古自治区和林格尔县, 1998年获北京航空航天大学电磁场与微波技术专业硕士学位, 同年考入该校攻读电磁场与微波技术专业博士学位, 主要从事电磁场数值计算方法、微波馈源、超宽带天线及馈线系统等方面的研究工作, 发表论文10余篇。



吕善伟 男, 1937年生于辽宁大连, 教授、博士生导师, 1960年毕业于北京航空学院无线电系, 1961年从事微波测量的科研和教学工作, 1962年在清华大学无线电系进修微波技术与天线, 1963年至今在北航无线电系长期从事微波、航空及宇航天线、微波通信系统方面教学和科研工作, 获部级以上科技奖6项, 在核心期刊上发表论文百余篇, 出版著作5部, 培养硕士、博士、博士后40余名。